



## University of the Pacific Scholarly Commons

---

[Euler Archive - All Works](#)

[Euler Archive](#)

---

1738

# De curvis rectificabilibus algebraicis atque trajectoriis reciprocis algebraicis

Leonhard Euler

Follow this and additional works at: <https://scholarlycommons.pacific.edu/euler-works>



Part of the [Mathematics Commons](#)

Record Created:

2018-09-25

---

### Recommended Citation

Euler, Leonhard, "De curvis rectificabilibus algebraicis atque trajectoriis reciprocis algebraicis" (1738).  
*Euler Archive - All Works*. 23.  
<https://scholarlycommons.pacific.edu/euler-works/23>

This Article is brought to you for free and open access by the Euler Archive at Scholarly Commons. It has been accepted for inclusion in Euler Archive - All Works by an authorized administrator of Scholarly Commons. For more information, please contact [mgibney@pacific.edu](mailto:mgibney@pacific.edu).

DE  
CURVIS RECTIFICABILIBVS  
ALGEBRAICIS  
ATQVE  
TRAIECTORIIS RECIPROCIS ALGE-  
BRAICIS.

*Auct. Leonh. Eulero.*

**Q** Vanquam admodum facile est innumeras dare curvas algebraicas, quae rectificari possunt, quaerendis vel euolutis vel causticis curvarum algebraicarum; tamen si ordines curvarum consideremus, rarissime in iis occurrunt, quae rectificationem admittant. In ordine linearum secundo, qui ex sectionibus conicis constat, nulla est huiusmodi; in tertio duae habentur rectificabiles, quantum quidem constat. Cum autem ante aliquot annos in inveniendis traiectoriis reciprocis algebraicis occupatus essem, methodum *Celeb. Iob. Bernoulli* primum sequutus diligentissime curvas rectificabiles anquirebam, ut iis ad propositum vterer. Detexi etiam in ordine sexto curvam rectificabilem, quae mihi praebat traiectoriam algebraicam ordinis quarti, eaque satisfeci quaestioni tum agitatae, de exhibendis simplicioribus traiectoriis reciprocis algebraicis. Inveni quoque multas aequationes generales curvas rectificabiles dantes, ex quibus in promptu erat omnes curvas re-

*Tom. V.*

Y

ctifica-

ctificabiles simpliciores eruere. Haec iterum nunc perlustrans deductus sum ad generalissimam quandam aequationem curvas rectificabiles omnes in se continentem. Insunt enim in ea plures quantitates vniuersales, pro quibus quicquid substituatur, curua rectificabilis, prodit. Sit quantitas quaedam variabilis  $z$ , cuius differentiale ponatur constans, sintque  $P$  et  $Q$  huius variabilis  $z$  functiones quaecunque saltem algebraicae. Si iam hoc modo construatur curua ut eius abscissa, quae ponatur  $x$ , sumatur aequalis  $P + \frac{dQ(dp^2 - dQ^2)}{dQddP - dPddQ}$  et applicata quam voco  $y = \frac{(dp^2 - dQ^2)^{\frac{3}{2}}}{dQddP - dPddQ}$ . Erit huius curuae longitudo  $s$  appellata aequalis  $Q + \frac{dP(dp^2 - dQ^2)}{dQddP - dPddQ}$ . Semper igitur quicunque valores literis  $P$  et  $Q$  tribuantur, curua erit rectificabilis et algebraica. Demonstrationem huius dare non opus esse iudico, cuilibet enim, si sumferit differentiaalia coordinatarum  $x$  et  $y$  et curuae  $s$ , innotescet esse  $dx^2 + dy^2 = ds^2$  labore tantum est opus nullo autem artificio.

Haec forma quidem latissime patet, sed habeo tamen aliam adhuc multo generaliorem, imo generalissimam sequentem. Designantibus ut ante literis maiusculis  $L$ ,  $M$  et  $N$  functiones quascunque variabilis  $z$ , si sumantur

$$x = L + \frac{(dL^2 + dM^2 - dN^2)(dLdN + dM^2 - dN^2)}{dLdNddL + dM^2ddM - dL^2ddN - dM^2ddN + (dLddM - dMddL)(dL^2 + dM^2 - dN^2)}$$

$$y = M + \frac{(dL^2 + dM^2 - dN^2)(dM^2ddN + dL^2ddL - dM^2ddN)}{dLdNddL + dM^2ddM - dL^2ddN - dM^2ddN + (dLddM - dMddL)(dL^2 + dM^2 - dN^2)}$$

erit longitudo curuae respondentis

$$s = N$$

# DE CURVIS RECTIFICABILIBVS ALG. 171

$$s = N + \frac{(dL^2 + dM^2 - dN^2)(dL^2 + dM^2)}{dLdNddL + dMddM - dL^2ddN - dM^2ddN + (dLdM - dMdL)\sqrt{(dL^2 + dM^2 - dN^2)}}$$

Formulae hae in praecedentes mutantur, si ponatur  $M = 0$ , sunt igitur illae in his contentae.

Facile perspicitur, si literae  $L$ ,  $M$  et  $N$  non solum significant quantitates algebraicas, sed etiam transcendentales quasque, in istis formulis omnes prorsus contineri curvas tam algebraicas quam transcendentales. Quia enim hae functiones  $L$ ,  $M$  et  $N$  nullo modo a se invicem sunt pendentes, nulla excogitari potest aequatio inter  $x$  et  $y$ , siue sit algebraica siue transcendens, quae non ad praescriptas formulas esset reducibilis.

Simili modo si manente  $N$  functione vniuersalissima, ita tamen ut  $\frac{dN}{dz}$  sit functio algebraica  $L$  vero et  $M$  denotent functiones algebraicas, omnes prorsus curvae algebraicae in formulis datis comprehenduntur; erunt autem eae rectificabiles si  $N$  assumatur functio algebraica, at vero si  $N$  non fuerit functio algebraica, sed transcendens seu a quadratura curvae cuiusdam pendens, curva resultans non erit rectificabilis, sed eius rectificatio pendeat a quadratura eius curvae. Hoc igitur modo soluitur etiam celebre illud problema multum inter Geometras agitatum, postulans methodum quadraturas curvarum ad rectificationes curvarum algebraicarum reducendi, cuius solutiones duae datae sunt in Actis Lipsiensibus a Viris Ce-

leberrimis *Iac. Hermanno* et *Ioh. Bernoullio*. Ex istis vero formulis ita soluetur; sint curvae, cuius quadratura ad rectificationem curvae algebraicae est reducenda, coordinatae  $t$  et  $v$  quarum vtraque sit functio algebraica ipsius  $z$ . Sumatur  $N = R + a \int v dt$ , vbi  $R$  etiam designet functionem ipsius  $z$  algebraicam quamcunque. Hoc posito dabunt formulae traditae omnes curvas algebraicas, quarum rectificatio a quadratura curvae propositae, scilicet a  $\int v dt$  pendent, si quidem  $L$  et  $M$  assumantur, vt iam est monitum, functiones algebraicae ipsius  $z$ . Alter vsus harum formularum, quem hic exponere constitui, respicit ad inuentionem trajectoriarum reciprocarum; reperitur enim ex iis aequatio vniuersalissima omnes trajectorias reciprocas in se complectens, quae etiam facillime ita restringitur, vt algebraicas tantum easque omnes praebeat.

Tabula VII.  
Fig. 6.

Nititur autem haec inuentio theoremate *Bernoulliano*, quo ex rectificatione curvarum diametrum habentium construuntur trajectoriae reciprocae, hoc modo:  $MAM$  est curua huiusmodi diametrum habens  $AP$ , et verticem  $A$  in quo tangens  $AQ$ , est perpendicularis ad diametrum  $AP$ . Per huius curuae singula puncta  $M$  ducantur rectae diametro parallelae, in iisque sumantur  $MN$  aequales arcibus  $AM$ , constituent puncta  $N$  curuam  $NAE$  trajectoriam reciprocam, cuius axis conuersionis est ipsa diameter  $PAB$ . Huius curuae si sumatur abscissa

sciffa AQ et applicata QN, erit  $AQ = PM$  et  $QN = AM - AP$ . Quamobrem si curvae MAM coordinatae AP et PM eadem sumantur, quae ante vocatae erant  $x$  et  $y$ , habebitur statim aequatio pro traiectoria reciproca EAN. Quia vero non omnis curva in locum MAM collocari potest; in aequationibus supra traditis literae L, M et N quodammodo restringi debent, ut tantum curvas ad institutum accommodatas praebeant. Cum omnes lineae AP, PM et AM sint functiones ipsius  $z$ , ita eae in  $z$  determinantur, ut sumto  $z$  affirmatio prodeat curvae MAM ramus dexter, at posito  $z$  negatio ut prodeat ramus sinister. Ad hoc requiritur, ut AP quia in utroque casu eadem manet, sit functio par ipsius  $z$ , seu functio quae immutata manet, etiamsi  $z$  fiat negatiuum. At PM et AM esse oportet functiones ipsius  $z$  impares, i. e. quae fiant negatiuae mutato  $z$  in  $-z$ . Quamobrem esse debet L functio par ipsius  $z$  M vero et N functiones impares. His enim positis absciffa aequabitur functioni pari, applicata vero et ipsa curva functionibus imparibus. Nam  $dL$  erit functio impar,  $ddL$  functio par,  $dM$  et  $dN$  functiones pares, atque  $ddM$  et  $ddN$  functiones impares. Ex quo perspicietur lineas AP, PM et AM requisitam habituras esse proprietatem. Erit igitur

$$AQ = M + \frac{(dL^2 + dM^2 - dN^2)(dM dN + dL \sqrt{dL^2 + dM^2 - dN^2})}{dL dN ddL + dM dN ddM - dL^2 ddN - dM^2 ddN + (dL dM - dM ddL) \sqrt{dL^2 + dM^2 - dN^2}}$$

Atque traiectoriae reciprocae EAN applicata erit

$$QN = N - L + \frac{(dL^2 + dM^2 - dN^2)(dL^2 + dM^2 - dL dN - dM \sqrt{dL^2 + dM^2 - dN^2})}{dL dN ddL + dM dN ddM - dL^2 ddN - dM^2 ddN + (dL dM - dM ddL) \sqrt{dL^2 + dM^2 - dN^2}}$$

Ex hac constructione fluent omnes traiectoriae reciprocae, si loco  $L$ ,  $M$  et  $N$  substituantur functiones non solum algebraicae, sed etiam transcendentes. Algebraicae vero traiectoriae reciprocae omnes habebuntur, si eae quantitates fuerint functiones algebraicae, et quidem ut requiritur  $L$  functio par, atque  $M$  et  $N$  functiones impares.

Notandum porro est etiam  $\sqrt{(dL^2 + dM^2 - dN^2)}$  esse debere functionem ipsius  $z$  imparem quemadmodum  $dL$ . Ponatur igitur  $\sqrt{(dL^2 + dM^2 - dN^2)} = dL - dS$ , ubi  $dS$  est functio impar ipsius  $z$ , adeoque  $S$  functio par erit  $\frac{dN^2 - dM^2 + dS^2}{2dS} = dL$ , ex quo erit  $dL$  functio impar ut requiritur, et  $\sqrt{(dL^2 + dM^2 - dN^2)} = \frac{dN^2 - dM^2 - dS^2}{2dS}$ . Erit igitur  $L = \frac{1}{2} \int \frac{dN^2 - dM^2}{dS} + \frac{1}{2} S$ . Quamobrem ut traiectoria reciproca fiat algebraica, oportet  $\frac{dN^2 - dM^2}{dS}$  esse integrabile. Erit autem abscissa  $AQ = M + \frac{(dN^2 - dM^2 - dS^2)((dN + dM)^2 - dS^2)}{4dS(dSdM + dSdN - dNds - dMds)}$  et  $QN = N - \frac{1}{2} \int \frac{dN^2 - dM^2}{dS} - \frac{1}{2} S + \frac{(dN^2 - dM^2 - dS^2)(4dMdn + (dN - dM - dS)^2)}{4dS(dSdM + dSdN - dNds - dMds)}$ . Quamdiu autem  $\sqrt{(dL^2 + dM^2 - dN^2)}$  manet quantitas surda, non opus est peculiari determinatione, est enim radix quadrata ex functione pari non quadrato tam functio par quam impar.